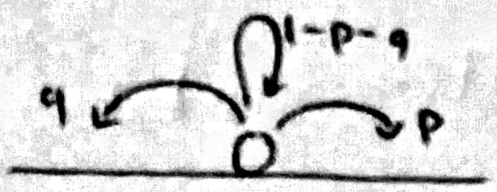
Τρίτη, 28 Νοεμβρίου 2017

ΑΠΛΟΣ ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ
ΜΕ ΔΥΟ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΑΠΟΡ/ΣΗΣ



$x_0 = j$

Σημεία απορ/σης: $-b$, a, με $a, b > 0$

Θα μας απασχολήσουν τα εξής ερωτήματα:

1) $P\left(\begin{array}{c}\text{τελικής}\\ \text{απορ/σης}\end{array}\right)$

2) $P\left(\begin{array}{c}\text{τελικής}\\ \text{απορ/σης στο } a\end{array}\right)$, $P\left(\begin{array}{c}\text{τελικής}\\ \text{απορ/σης στο } -b\end{array}\right)$

3) Μέσος χρόνος απορρόφησης

Πρώτο ερώτημα $\longrightarrow$ $P\left(\begin{array}{c}\text{τελικής}\\ \text{απορ/σης}\end{array}\right) = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$P(\text{τελ απορ}) = 1 - P\left(\begin{array}{c}\text{το σωματίδιο να}\\ \text{κινείται απεριόριστα}\end{array}\right)$

$P($

$P(\text{κινείται απεριόριστα}) = P(-b+1 \le X_n \le a-1)$

$\le P(-b+1 \le X_n^* \le a-1)$, όπου X_n^* η σ.δ. του Σ.Α.Τ.Π.

$\simeq \Phi\left(\frac{a-1+0.5-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-b+1-0.5-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = p-q \\ \sigma^2 = p+q-(p-q)^2 \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \mu=0 \Longrightarrow \text{όριο } 0 \\ \bullet\ \mu>0 \Longrightarrow \text{-''-} \\ \bullet\ \mu<0 \Longrightarrow \text{-''-} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{σε κάθε περίπτωση τείνει στο 0,}$$

άρα $P(\text{κινείται απεριόριστα}) = 0$

<u>Δεύτερο ερώτημα</u> → $P(\text{τελ. απορ. στο } a) + P(\text{τελ. απορ. στο } -b) = P(\text{τελ. απορ.}) = 1$

$(\text{τελ. απορ. στο } a \mid X_0 = j)$

Συμβολίζω με $f_{ja}^{(n)} = P\big($ να βρεθώ για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή n στη θέση a, ενώ στις προηγούμενες χρονικές στιγμές δεν έχω περάσει ούτε από το a ούτε από το −b, με δεδομένο ότι $X_0 = j \big)$

Δηλαδή, $f_{ja}^{(n)} = P(-b < X_1 < a, -b < X_2 < a, \dots, X_n = a \mid X_0 = j)$

<u>Ειδικές Περιπτώσεις</u>

$\xrightarrow{j=a}$ $f_{aa}^{(0)} = 1 \qquad f_{aa}^{(n)} = 0, \ n \geq 1$

$\xrightarrow{j=-b}$ $f_{-ba}^{(n)} = 0, \ n \geq 0$

Άρα, $P(\text{τελ. απορ. στο } a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ja}^{(n)}$

$f_{ja}^{(n)} = P\Big($ $\overbrace{A_1)\ j \to j+1}^{A_{11}}$ και $\overbrace{j+1 \text{ στο } a \text{ με } n-1 \text{ βήματα για } 1^{η} \text{ φορά χωρίς να περάσω το } -b}^{A_{12}}$

$A_2)\ j \to j-1$ και $j-1$ στο a -"- -"-

$A_3)\ j \to j$ και j στο a -"- -"- $\Big)$

$$f_{ja}^{(n)} = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \xrightarrow{\text{ξένα}} P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$

$$= P(A_{11} \cap A_{12}) + P(A_{21} \cap A_{22}) + P(A_{31} \cap A_{32}) =$$

$$\xrightarrow{\text{ανεξάρτητα}} P(A_{11})P(A_{12}) + P(A_{21})P(A_{22}) + P(A_{31}) \cdot P(A_{32}) =$$

$$= p \cdot f_{j+1\,a}^{(n-1)} + q\, f_{j-1\,a}^{(n-1)} + (1-p-q)\, f_{ja}^{(n-1)}$$

$$F_{ja}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ja}^{(n)} s^n \quad , \ |s|<1 \ , \ s \in (0,1)$$

$F_{ja}(1) = P(\text{τελ. απορ. στο } a)$

$$s^n f_{ja}^{(n)} = p \cdot s^n f_{j+1\,a}^{(n-1)} + q \cdot s^n f_{j-1\,a}^{(n-1)} + (1-p-q) s^n f_{ja}^{(n-1)} \Rightarrow$$

$$F_{ja}(s) = p \cdot s\, F_{j+1\,a}(s) + q \cdot s\, F_{j-1\,a}(s) + (1-p-q) \cdot s F_{ja}(s)$$

↑ Εξίσωση Διαφορών 2ου Βαθμού ως προς j

$\Rightarrow psF_{j+1}a(s) - [1-(1-p-q)]F_j a(s) + qsF_{j-1}a(s) = 0$

$\Rightarrow p\cdot s\lambda^2 - [1-(1-p-q)s]\lambda + qs = 0 \longleftarrow$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Η περίπτωση $\Delta < 0$, δεν υπάρχει

$\Delta = [1-(1-p-q)s]^2 - 4\cdot p\cdot q\cdot s^2$

$\Delta < 0$ συμβαίνει, $[1-(1-p-q)s]^2 < 4pqs^2 = (2\sqrt{pq}\,s)^2 \Rightarrow$

$$1-(1-p-q)s < 2\sqrt{pq}\,s \Rightarrow$$

$$s > \frac{1}{(1-p-q)+2\sqrt{pq}} = 1+\varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow 1-p-q+2\sqrt{pq} < 1 \Rightarrow$$

$$1-2\sqrt{pq}+p+q-1 > 0 \Rightarrow$$

$$(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2 > 0 \quad \text{ισχύει}$$

Άτοπο!

Όταν $\Delta > 0$ τότε υπάρχουν δύο διακριτές ρίζες $\lambda_1(s), \lambda_2(s)$, όπου

$$F_{ja}(s) = A\lambda_1^j(s) + B\lambda_2^j(s)$$

$$F_{aa}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{aa}^{(n)} \cdot s^n = 1 \longrightarrow A\lambda_1^a(s) + B\lambda_2^a(s) = 1$$

$$F_{-ba}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{-ba}^{(n)} \cdot s^n = 0 \longrightarrow A\lambda_1^{-b}(s) + B\lambda_2^{-b}(s) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} A\lambda_1^{a-b}(s) + B\,\frac{\lambda_2^{a}(s)}{\lambda_1^{b}(s)} &= \lambda_1^{-b}(s) \\ A\lambda_1^{a-b}(s) + B\,\frac{\lambda^{a}(s)}{\lambda_2^{b}(s)} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad B = -\frac{\lambda_2^{b}(s)}{\lambda_1^{a+b}(s) - \lambda_2^{a+b}(s)}, \quad A = \frac{\lambda_1^{b}(s)}{\lambda_1^{a+b}(s) - \lambda_2^{a+b}(s)}$$

- Όταν $\Delta = 0$, τότε υπάρχει μια διπλή ρίζα $\lambda(s)$, όπου

$$F_{ja}(s) = A\lambda^{j}(s) + Bj\lambda^{j}(s)$$

$F_{aa}(s) = 1$

$F_{-ba}(s) = 0$

$$A = \frac{b}{a+b}\lambda^{-a}(s)$$

$$B = \frac{\lambda^{-a}(s)}{a+b}$$

$$F_{ja}(s) = \frac{\lambda_1^{b+j}(s) - \lambda_2^{b+j}(s)}{\lambda_1^{a+b}(s) - \lambda_2^{a+b}(s)}, \quad \Delta > 0 \qquad \lambda_{1,2} = 1,\ \frac{q}{p}$$

$$F_{ja}(s) = \frac{b+j}{a+b}\,\lambda^{j-a}(s), \quad \Delta = 0 \qquad \lambda(1) = 1 \ (p=q)$$

$$\xrightarrow{s=1} p\lambda^2 - [1-(1-p-q)]\lambda + q = 0$$

ή $p\lambda^2 - (p+q)\lambda + q = 0$

$\Delta = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2$

$\Delta = 0$ όταν $p = q$

Τότε η διπλή ρίζα $\lambda(1) = \dfrac{p+q}{2p} = 1$

$\Delta > 0$, όταν $p \neq q$

$$\lambda_{1,2}(1) = \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p-q)^2}}{2p} = \frac{(p+q) \pm |(p-q)|}{2p} \begin{cases} \xrightarrow{p>q} 1,\ \frac{q}{p} \\ \xrightarrow{p<q} 1,\ \frac{q}{p} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} A\lambda_1^{a-b}(s) + B\,\frac{\lambda_2^{a}(s)}{\lambda_1^{b}(s)} &= \lambda_1^{-b}(s) \\ A\lambda_1^{a-b}(s) + B\,\frac{\lambda_1^{a}(s)}{\lambda_2^{b}(s)} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} B &= -\frac{\lambda_2^{b}(s)}{\lambda_1^{a+b}(s) - \lambda_2^{a+b}(s)} \\ A &= \frac{\lambda_1^{b}(s)}{\lambda_1^{a+b}(s) - \lambda_2^{a+b}(s)} \end{aligned}$$

• Όταν $\Delta = 0$, τότε υπάρχει μία διπλή ρίζα $\lambda(s)$, όπου

$$F_{ja}(s) = A\,\lambda^{j}(s) + Bj\,\lambda^{j}(s)$$

$$F_{aa}(s) = 1 \qquad A = \frac{b}{a+b}\,\lambda^{-a}(s)$$

$$F_{-ba}(s) = 0 \qquad B = \frac{\lambda^{-a}(s)}{a+b}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} F_{ja}(s) = \dfrac{\lambda_1^{b+j}(s) - \lambda_2^{b+j}(s)}{\lambda_1^{a+b}(s) - \lambda_2^{a+b}(s)} \quad , \Delta > 0 \qquad \lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ \frac{q}{p} \end{cases} \\ \\ F_{ja}(s) = \dfrac{b+j}{a+b} \cdot \lambda^{j-a}(s) \quad , \Delta = 0 \\ \qquad\qquad \lambda(1) = 1 \ (p=q) \end{array}}$$

$$\xrightarrow{s=1} p\lambda^2 - [1-(1-p-q)]\lambda + q = 0$$

ή $p\lambda^2 - (p+q)\lambda + q = 0$

$\Delta = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2$

$\Delta = 0$ όταν $p = q$

Τότε η διπλή ρίζα $\lambda(1) = \dfrac{p+q}{2p} = 1$

$\Delta > 0$ όταν $p \neq q$

$$\lambda_{1,2}(1) = \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p-q)^2}}{2p} =$$

$$= \frac{(p+q) \pm |(p-q)|}{2p} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{p>q} 1, \frac{q}{p} \\ \xrightarrow{p<q} 1, \frac{q}{p} \end{array}$$

• Όταν $p=q$, $F_{ja}(1) = \dfrac{b+j}{a+b}$

• Όταν $p \neq q$, $F_{ja}(1) = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{b+j}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \dfrac{p^{b+j}-q^{b+j}}{p^{a+b}-q^{a+b}} \cdot p^{a-j}$

Α.Τ.Π. Με Ένα Φράγμα Απορρόφησης Στο α

ΧΒΤΓ , $x_0=0$

$$\lim_{b\to\infty} P\left(\text{απορ. στο } a \text{ έχοντας δύο φρ. απορ. στο } a,-b \;\middle|\; x_0=0\right)$$

• Όταν $p=q$, $\lim_{b\to\infty} \dfrac{b}{a+b} = 1$

• Όταν $p>q$, $\left(\frac{p}{q}>1\right)$ $\lim_{b\to\infty} p^a \dfrac{p^b-q^b}{p^{a+b}-q^{a+b}} = \lim_{b\to\infty} p^a \dfrac{\cancel{p^b}\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^b\right]}{\cancel{p^{a+b}}\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right]} = 1$

• Όταν $p < q$, $\lim\limits_{b \to \infty} p^a \dfrac{q^b\left[\left(\frac{p}{q}\right)^b - 1\right]}{q^{a+b}\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b} - 1\right]} = \left(\dfrac{p}{q}\right)^a$

$\left(\frac{p}{q} < 1\right)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν $p \geq q$, η απορρόφηση είναι σίγουρη, ενώ, αν $p < q$ με πιθανότητα $\left(\frac{p}{q}\right)^a$, ο περίπατος έχει πεπερασμένη διάρκεια, ενώ με πιθανότητα $\left(\frac{1-p}{q}\right)^a$, το σωματίδιο παραμένει συνεχώς σε καταστάσεις $< a$.

Άσκηση 4

Έστω πίνακας μετάβασης μιας Μ.Α., $S=\{0,1,2,\dots\}$

$$P=\begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix} \qquad (p+q=1)$$

Να βρούμε $p_{00}^{(2)}$, $p_{01}^{(2)}$, $p_{02}^{(2)}$

$p_{i0}^{(2)}$, $p_{ii}^{(2)}$, $p_{i\,i+2}^{(2)}$, $i=1,2,\dots$

Λύση

- $p_{00}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \nearrow 0 \longrightarrow 0 \\ \searrow 1 \longrightarrow 0 \end{array}\right) = q\cdot q + p\cdot q = q(\cancelto{1}{q+p}) = q$

- $p_{01}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \nearrow 0 \longrightarrow 1 \\ \searrow 1 \longrightarrow 1 \end{array}\right) = qp + p\cdot 0 = qp$

- $p_{02}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \nearrow 0 \longrightarrow 2 \\ \searrow 1 \longrightarrow 2 \end{array}\right) = q\cdot 0 + p\cdot p = p^2$

- $p_{i0}^{(2)} = P\left(i \begin{array}{l} \nearrow i+1 \longrightarrow 0 \\ \searrow 0 \longrightarrow 0 \end{array}\right) = p\,q + q\,q = q(\cancelto{1}{p+q}) = q$

- $p_{ii}^{(2)} = P\left(i \begin{array}{l} \nearrow i+1 \longrightarrow i \\ \searrow 0 \longrightarrow i \end{array}\right) = p\cdot 0 + q\cdot p = qp$

- $p_{i\,i+2}^{(2)} = P\left(i \begin{array}{l} \nearrow i+1 \longrightarrow i+2 \\ \searrow 0 \longrightarrow i+2 \end{array}\right) = pp + q\cdot 0 = p^2$

Άσκηση 7

$f_{00}^{*} = ;$ με βάση του ορισμό

$\mu_0 = ;$ (σύμφωνα με την άσκηση 4)

Λύση

$$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}$$

$$f_{00}^{(1)} = P(0 \longrightarrow 0) = q$$

$$f_{00}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \cancel{\longrightarrow} 0 \longrightarrow 0 \\ \longrightarrow 1 \longrightarrow 0 \end{array}\right) = p \cdot q$$

$$f_{00}^{(3)} = P\left(0 \longrightarrow 1 \begin{array}{l} \cancel{\longrightarrow} 0 \longrightarrow 0 \\ \longrightarrow 2 \longrightarrow 0 \end{array}\right) = P(0 \to 1 \to 2 \to 0) = p \cdot p \cdot q = p^2 \cdot q$$

$\vdots$

$$\boxed{f_{00}^{(n)} = p^{n-1} \cdot q, \quad n = 1, 2, \dots}$$

$$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} \cdot q = q \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} = \frac{q}{1-p} = 1 \Rightarrow \text{επαναληπτική}$$

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} \cdot q = q \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = q \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{q} \Rightarrow \text{θετικώς επαναληπτι}$$

Άσκηση 6

X_n ο αριθμός των επιτυχιών σε ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με $P(E)=p$ να υπολογιστούν οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος

Λύση

Τιμές της X_n: $0,1,2,\dots,n$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{array} \qquad P_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & i>j \\ P\left(\begin{array}{l}\text{στις } n \text{ δοκιμές να} \\ \text{έχω } j-i \text{ επιτυχίες}\end{array}\right), & i \le j \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & i>j \\ \binom{n}{j-i} p^{i-j}(1-p)^{n-(i-j)}, & i \le j \end{cases}$$

Άσκηση 5

X_n

0: βροχερή μέρα

1: όχι βροχερή μέρα

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

(i) 6 Γενάρη όχι βροχερή, αν γνωρίζουμε ότι η 1η Γενάρη δεν ήταν βροχερή

1η Γενάρη — 6η Γενάρη

όχι βροχερή

(ii) Αν δεν έχουμε αυτή τη γνώση, ποια η πιθανότητα; Θεωρείστε ότι οι 2 καταστάσεις είναι αρχικά ισοπίθανες

Λύση

(i) $p^{(n)} = p^{(0)} P^{(n)}$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$P^n = \dots$

(ii) $p_1^{(5)} = ;$

$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot p(n)$ με ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

$$p_1^{(5)} = \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\uparrow}{p_0^{(0)}}} r + \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\uparrow}{p_1^{(0)}}} w$$

$$\left.\begin{array}{l} p_0^{(0)} = p_1^{(0)} \\ p_0^{(0)} + p_1^{(0)} = 1 \end{array}\right\}$$

Ασκήσεις 24, 40